

## Correction Devoir maison bonus n°1

**Exercice 1**

Pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on note l'évènement  $A_i$  : "Le cadeau se trouve à la  $i^{\text{ème}}$  porte"

**Cas n°1**

On choisit la porte n°1 et on décide de ne pas changer de porte. Notre probabilité de gagner le cadeau est donc

$$P(A_1) = \frac{1}{3}.$$

**Cas n°2**

Le présentateur ouvre une des deux autres portes qui ne contient pas le cadeau (pour fixer les idées, la porte n°2). Si l'on change de porte, notre probabilité de gagner est maintenant

$$P_{A_2}(A_3) = \frac{P(\overline{A_2} \cap A_3)}{P(\overline{A_2})} = \frac{P(A_3)}{P(\overline{A_2})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Il est donc toujours plus avantageux de changer de porte.

**Exercice 2**

1. Soit  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ . On a alors  $A + B = (c_{i,j})$  avec  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ . On a alors

$${}^t(A + B) = (c_{j,i}) = (a_{j,i} + b_{j,i}).$$

On a également

$${}^t A + {}^t B = (a_{j,i}) + (b_{j,i})$$

Les coefficients étant égaux, on a

$${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$$

2. Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  deux matrices symétriques. On a alors

$$\begin{aligned} {}^t(A + B) &= {}^t A + {}^t B \\ &= A + B \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

## Exercice 3

1. Il y a deux façons de résoudre cette question.

(a) En utilisant le résultat concernant la somme des  $k^3$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) &= 2 \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} (n(n+1) - 1) \\ &= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2} \end{aligned}$$

On a donc bien obtenu que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}.}$$

(b) Montrons par récurrence sur  $n$  les propriétés :

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2} \right\}.$$

**Initialisation :** Tout d'abord, on a  $1(2 \times 1^2 - 1) = 1$  et  $\frac{1(1+1)(1+1-1)}{2} = 1$  donc l'égalité est vraie pour  $n = 1$ .

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que :

$$\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2},$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(2k^2 - 1) &= \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) + (n+1)(2(n+1)^2 - 1) \\ &= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2} + (n+1)(2n^2 + 4n + 1) \\ &= \frac{n+1}{2} (n(n^2 + n - 1) + 2(2n^2 + 4n + 1)) \\ &= \frac{n+1}{2} (n^3 + 5n^2 + 7n + 2) \end{aligned}$$

De plus,

$$(n+2) \left( (n+1)^2 + n + 1 - 1 \right) = (n+2)(n^2 + 3n + 1) = n^3 + 5n^2 + 7n + 2,$$

Pour résumer, on a obtenu que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(2k^2 - 1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)^2 + (n+1) - 1)}{2}.$$

Ainsi  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

2. Montrons par récurrence sur  $n$  que :

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \ln(x_k) = \ln \left( \prod_{k=1}^n x_k \right) \right\}.$$

**Initialisation** : Soit  $x_1$  un nombre réel. On a bien  $\sum_{k=1}^1 \ln(x_k) = \ln(x_1) = \ln \left( \prod_{k=1}^1 x_k \right)$ . Donc  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soient  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  des nombres réels. On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \ln(x_k) &= \sum_{k=1}^n \ln(x_k) + \ln(x_{n+1}) \\ &= \ln \left( \prod_{k=1}^n x_k \right) + \ln(x_{n+1}) \\ &= \ln \left( x_{n+1} \prod_{k=1}^n x_k \right) \\ &= \ln \left( \prod_{k=1}^{n+1} x_k \right) \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

**Conclusion** : Pour tout  $n$  entier  $\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}$ .

## Exercice 4

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} (4^{2-k} + 5^k 6^{n-k+1}) &= \sum_{k=2}^{n-1} 4^{2-k} + \sum_{k=2}^{n-1} 5^k 6^{n-k+1} = 4^2 \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k + 6^{n+1} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= 4^2 \frac{1}{4^2} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-2+1}}{1 - \frac{1}{4}} + 6^{n+1} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1-2+1}}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 6^{n+1} \left(\frac{5}{6}\right)^2 6 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 6^n 5^2 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 25 (6^n - 6^2 5^{n-2}) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 25 \times 6^n - 6^2 \times 5^n \end{aligned}$$

On a obtenu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \sum_{k=2}^{n-1} (4^{2-k} + 5^k 6^{n-k+1}) = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 25 \times 6^n - 36 \times 5^n$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{n+1} 2^{3k+2} \binom{n}{k-1} &= \sum_{i=2}^n 2^{3i+5} \binom{n}{i} \quad \text{changement d'indice } i = k - 1 \\ &= 2^5 \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} 8^i \\ &= 2^5 \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 8^i 1^{n-i} - \binom{n}{0} 8^0 - \binom{n}{1} 8^1 \right) \\ &= 2^5 ((8+1)^n - 1 - 8n) \end{aligned}$$

Pour conclure,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=3}^{n+1} 2^{3k+2} \binom{n}{k-1} = 32(9^n - 8n - 1)$$

## Exercice 5

1. On remarque que  $c - a = \frac{b-a}{2}$ , or  $b > a$  donc  $c - a > 0$ . De même,  $c - b = \frac{a-b}{2}$  donc  $c - b < 0$ . Ainsi, on a bien  $a < c < b$ .

Montrons que  $c$  est rationnel.  $a$  et  $b$  sont rationnels donc

$$\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, a = \frac{x}{p}, b = \frac{y}{q}.$$

On a alors

$$c = \frac{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}}{2} = \frac{\frac{xq+yp}{pq}}{2} = \frac{xq+yp}{2pq}.$$

Or  $(xq + yp) \in \mathbb{Z}$  et  $2pq \in \mathbb{N}^*$ , donc  $c \in \mathbb{Q}$ . On a bien montré que

$$c \text{ est un rationnel vérifiant } a < c < b.$$

2. Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de plus petit rationnel strictement supérieur à 1. Supposons donc qu'il existe un plus petit rationnel strictement supérieur à 1, notons le  $\alpha$ .

Soit  $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$ . D'après la question (1), on a alors  $\beta \in \mathbb{Q}$  et  $1 < \beta < \alpha$ . Ainsi,  $\beta$  est un rationnel à la fois strictement supérieur à 1 et strictement inférieur à  $\alpha$ , ce qui est absurde par définition de  $\alpha$ . On peut bien affirmer que :

$$\text{il n'existe pas de plus petit rationnel strictement supérieur à 1.}$$

## Exercice 6

Montrons par récurrence sur  $n$  que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Tout d'abord,  $\prod_{k=1}^1 \frac{2k}{2k+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$  et  $\frac{2^2(1!)^2}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  donc l'égalité est vérifiée pour  $n = 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que  $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1} &= \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right) \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{2n+2}{2n+2} \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2 2^2(n+1)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!} \end{aligned}$$

et l'égalité reste vraie au rang  $n+1$ . On a finalement obtenu, d'après le principe de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Variante :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on remarque que :

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} = \frac{2^n \prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} = \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^n (2k+1)}$$

Écrivons plus simplement le dénominateur. On voit qu'il est composé uniquement des termes impairs de 1 à  $2n+1$ , on peut faire apparaître les termes pairs ainsi :

$$\prod_{k=1}^n (2k+1) = 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

On obtient finalement, puisque  $(2^n n!)(2^n n!) = 2^{2n}(n!)^2$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

## Exercice 7

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . Alors

$$A = \frac{A + {}^t A}{2} + \frac{A - {}^t A}{2}$$

Si on note  $B = \frac{A + {}^t A}{2}$ , alors on voit que  ${}^t B = B$ . Donc la matrice  $B$  est symétrique.

Si on note  $C = \frac{A - {}^t A}{2}$ , alors on voit que  ${}^t C = -C$ . Donc la matrice  $C$  est antisymétrique.

Ainsi, une matrice peut toujours s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.